INTENS Jurnal Riset Sains Teknologi dan Bisnis
Volume 1; Nomor 1 ; Juni 2024 ; Page 54-61

Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita

Nurul Aulia Bohari [1], Muh. Nursyam Siduppa [2]

[1]Sains Aktuaria, Institut Teknologi dan Sains Muhammadiyah Kolaka Utara
[2]Sains Aktuaria, Institut Teknologi dan Sains Muhammadiyah Kolaka Utara
[1]auliabohari@gmail.com, [2]muh.nursyamsiduppa09@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan bagaimana kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit pneumonia pada balita sehingga penyebaran penyakit tersebut dapat *dicegah*. Pada penelitian sebelumnya diketahui bahwa penyakit pneumonia pada balita bergantung pada keberadaan populasi yang infektif sehingga dilakukan pengontrolan terhadap populasi tersebut melalui kampanye kesehatan dan pengobatan. Teori kontrol optimal diaplikasikan pada model matematika. Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin dengan tujuan untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi. Simulasi numerik menunjukkan keefektifan pengendalian dengan kontrol kampanye kesehatan dan pengobatan dapat mengurangi yang terinfeksi sehingga penyebaran penyakit pneumonia dapat dicegah.

Kata Kunci : Model SEIR, Kampanye Kesehatan, Pengobatan, Kontrol Optimal

Abstract

This research aims to show how to optimally control the mathematical model for the diffusion of pneumonia in toddlers so that the diffusion of the disease can be prevented. In previous research, it was known that pneumonia in children under five depends on the presence of an infective population, so this population is controlled through health and treatment campaigns. Optimal control theory is applied to mathematical models. The optimal control problem is solved using the Pontryagin maximum principle with the aim of minimizing the number of infected individuals. Numerical simulations show the effectiveness of control with controlled health campaigns and treatment can reduce those infected so that the diffusion of pneumonia can be prevented.

Keyword : *SEIR Model, Health Campaign, Treatment, Optimal Control*

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis. Model matematika adalah hubungan antara komponen-komponen dalam suatu masalah yang dirumuskan dalam suatu persamaan matematik yang memuat komponen-kompenen itu sebagai variabelnya [11]. Model matematika dibuat berdasarkan asumsi-asumsi. Model matematika yang dibentuk akan dianalisa, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya kesehatan, kimia, bilogi, dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya. Dalam berbagai bidang ilmu yang dapat dibuat model matematika salah satunya dalam bidang kesehatan yaitu model matematika dalam fenomena penyebaran penyakit pneumonia.

Pneumonia adalah proses infeksi akut yang mengenai jaringan paru-paru (alveoli). Terjadinya pneumonia pada anak seringkali bersamaan dengan proses infeksi akut pada bronkus (biasa disebut bronchopneumonia). Gejala penyakit ini berupa napas cepat dan napas sesak, karena paru meradang secara mendadak. Ketika seseorang menderita pneumonia, maka alveoli akan dipenuhi nanah dan cairan yang membuat kesakitan saat bernapas dan asupan oksigen yang dihirup terbatas Pneumonia sering terjadi pada anak usia bawah lima tahun dan penyebab utama kematian dari 2 juta anak tiap tahun yang terjadi di negara berkembang [10].

Salah satu cara untuk mencegah penyakit ini adalah dengan kampanye kesehatan dan pengobatan. Kampanye kesehatan yang terintegrasi dengan menyasar pada perubahan perilaku guna mengatasi pneumonia pada balita ke masyarakat luas. Begitupun balita yang terkena penyakit pneumonia dapat di cegah dengan pengobatan.

Beberapa peneliti telah mengkaji model SEIR pada penularan penyakit dengan pengaruh vaksinasi. Diantaranya penelitian yang dilakukan [1] dengan judul penelitian “Pemodelan Matematika SIRS dengan pengaruh vaksinasi pada penyebaran penyakit malaria”, [4] dengan judul penelitian “Pemodelan Matematika SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan vaksinasi” dan penelitian yang dilakukan [8] dengan judul penelitian “Pemodelan matematika SIR dengan vaksinasi pada penyebaran penyakit hepatitis B (Studi Kasus Provinsi Sulawesi Selatan)”. Belum ada peneliti yang membuat dan menerapkan model matematika SEIR pada penyakit pneumonia. Maka dari itu penulis tertarik untuk mengkaji

INTENS Jurnal Riset Sains Teknologi dan Bisnis
Volume 1; Nomor 1 ; Juni 2024 ; Page 54-61

masalah control optimal penyebaran penyakit pneumonia menggunakan model SEIR untuk kasus pneumonia pada balita dengan pengobatan dan kampanye kesehatan.

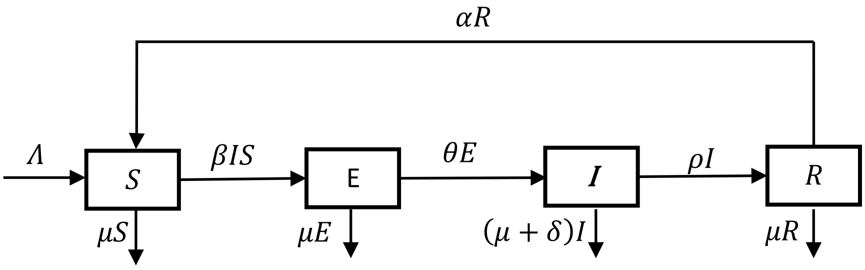
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature. Langkah pertama yang dilakukan adalah membangun model matematika dengan model SEIR yaitu dengan mengumpulkan informasi. Selanjutnya mencari titik keseimbangan dengan mensubtitusi persamaan model. Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar dengan metode *Next Generation Matrix.* Kemudian menentukan kontrol optimal dengan prinsip maksimum pontryagin yaitu dengan menentukan model kontrol optimal, menentukan fungsi objektif, membentuk persamaan Hamiltonian, menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi. Kemudian penyelesaian numerik kontrol optimal penyebaran penyakit pneumonia menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Matematika

Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian sebelumnya yang dilakukan [2]. yang membagi populasi kedalam empat sub populasi yaitu populasi rentan, populasi terdeteksi, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh. Pada penelitian ini akan ditambahkan kontrol optimal berupa kampanye kesehatan dan pengobatan. [2] menjelaskan bahwa penyakit pneumonia ditularkan melalui udara dari batuk dan bersin. Sehingga laju terinfeksi individu rentan memperoleh infeksi pneumonia baik melalui penularan dari orang ke orang dengan laju $\frac{\beta IS}{N}$. Dengan β merupakan probabilitas terjadinya kontak efektif dengan penderita pneumonia. Diasumsikan laju kematian alami pada populasi adalah sama yaitu sebesar μ. Karena kematian karena penyakit pada individu sangat kecil maka diasumsikan laju kematian karena penyakit hanya terjadi pada populasi terinfeksi dengan laju sebesar δ. Laju perpidahan individu yang terdeteksi menjadi individu terinfeksi sebesar θ. Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh sebesar ρ. Sedangkan α merupakan laju kesembuhan individu yang telah kehilangan kekebalan.



Gambar 1. Skema Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita

Dengan memperhatikan asumsi dan diagram skematik pada Gambar 1 diperoleh model persamaan diferensial sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda + \alpha R - \beta IS - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= \beta IS - \theta E - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= \theta E - (\mu + \delta + \rho) I \\
\frac{dR}{dt} &= \rho I - (\alpha + \mu) R
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2. Formulasi dan Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada pemodelan ini, teori kontrol optimal diterapkan untuk memperoleh fungsi kontrol dari kampanye kesehatan u_1 yang bertujuan untuk mengurangi laju infeksi Pneumonia , pengobatan untuk individu teinfeksi u_2. Fungsi kontrol $u_1(t)$ terdefinisi pada daerah $0 \le u_1(t) \le 1$, untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$. Nilai $u_1(t), = 0$ menunjukkan bahwa kampanye kesehatan yang diberikan tidak efisien dalam mengurangi laju infeksi dan nilai $u_1(t) = 1$ menunjukkan bahwa kampanye kesehatan yang diberikan sangat efisien dalam mengurangi laju infeksi. Fungsi $u_2(t)$ terdefinisi dalam daerah yang ditetapkan yaitu $0 \le u_2(t) \le 1$, untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$. Nilai $u_2(t) = 0$ menunjukkan bahwa pengobatan untuk individu teinfeksi u_2 tidak efisien dalammengurangi individu terinfeksi (I) dan nilai $u_2(t) = 1$ menunjukkan bahwa pengobatan untuk individu teinfeksi u_2 tidak efisien dalam

αR

mengurangi individu terinfeksi (I).dengan t_0 merupakan waktu awal dari pemberian kontrol dan t_f merupakan waktu akhir pemberian kontrol. Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh tiga fungsi kontrol yang didefinisikan pada daerah yang telah ditetapkan, yaitu:

$$U = \{(u_1(t), u_2(t)) | \, 0 \leq u_1, u_2 \leq 1, \qquad t \in [t_0, t_f]\}$$

Untuk menekan laju infeksi kami menambahkan kontrol berupa kampanye kesehatan sehingga diperoleh laju infeksi baru sebagai berikut $(1-u_1)\beta IS$. Untuk mengurangi jumlah individu infeksi dilakukan pengobatan pada individu terinfeksi sehingga laju masuknya individu terinfeksi $(\rho + u_2(t))I$. Sehingga sistem persamaan (1) dapat ditulis kembali sebagaimana sistem (2).

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda + \alpha R - (1-u_1)\beta IS - \mu S \\
\frac{dE}{dt} &= (1-u_1)\beta IS - (\theta + \mu)E \\
\frac{dI}{dt} &= \theta E - (\mu + \delta)I - (u_2 + \rho)I \qquad (2) \\
\frac{dR}{dt} &= (u_2 + \rho)I - (\alpha + \mu)R
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas dapat dibentuk fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \min_{(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})} \int_0^{t_f} \left(A_1 E + A_2 I + \frac{1}{2}(w_1 {u_1}^2 + w_2 {u_2}^2) \right) dt \qquad (3)$$

Penentuan kontrol optimal $\boldsymbol{u}^*$ menggunakan pinsip minimum Pontryagin yaitu menentukan fungsi Hamiltonian dari masalah optimasi tersebut. Bentuk umum dari fungsi Hamiltonian adalah

$$H(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = f(t, \boldsymbol{x}, u) + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, u) \qquad (4)$$

Misalkan pengali Lagrange dalam persamaan (3) adalah $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \;\; \lambda_4 \;\;)^{\boldsymbol{T}}$ selanjutnya

$$f(t, \boldsymbol{x}, u) = A_1 E + A_2 I + \frac{1}{2}(w_1 {u_1}^2 + w_2 {u_2}^2) \qquad (5)$$

Sehingga berdasarkan (3) dapat dibentuk fungsi Hamiltonian sebagai berikut,

$$H = A_1 E + A_2 I + \tfrac{1}{2}(w_1 {u_1}^2 + w_2 {u_2}^2) + \lambda_1(\Lambda + \alpha R - (1-u_1)\beta IS - \mu S) + \lambda_2((1-u_1)\beta IS - (\theta+\mu)E) + \lambda_3(\theta E - (\mu+\delta)I - (u_2+\rho)I) + \lambda_4((u_2+\rho)I - (\alpha+\mu)R). \qquad (6)$$

Dari fungsi hamilton akan ditentukan persamaan hamiltonian (4), costate dan kondisi stasioner. Dengan mengubah persamaan hamiltonian menjadi pengali lagrange, diperoleh persamaan berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \end{pmatrix}^T,$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \Lambda + \alpha R - (1-u_1)\beta IS - \mu S \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= (1-u_1)\beta IS - (\theta+\mu)E \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \theta E - (\mu+\delta)I - (u_2+\rho)I \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= (u_2+\rho)I - (\alpha+\mu)R
\end{aligned}$$

Persamaan Costate, $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial S} & -\frac{\partial H}{\partial I} & -\frac{\partial H}{\partial C} & -\frac{\partial H}{\partial R} & -\frac{\partial H}{\partial B} \end{pmatrix}^T$

atau

$$\dot{\lambda}_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\beta u_1 I + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta I + \mu \lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)\theta + \lambda_2 \mu - A_1$$

.
INTENS Jurnal Riset Sains Teknologi dan Bisnis
Volume 1; Nomor 1 ; Juni 2024 ; Page 54-61

$$\dot{\lambda}_3 = (\lambda_2 - \lambda_1)\beta u_1 S + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta S + \lambda_2(\delta + \mu) + (\lambda_3 - \lambda_4)\rho + (\lambda_3 - \lambda_4)u_2 - A_2$$

$$\dot{\lambda}_4 = (\lambda_4 - \lambda_1)\alpha + \lambda_4 \mu \quad (7)$$

Kondisi stationer merupakan kondisi dimana kontrol optimal $u_i(t)$ harus dapat meminimumkan bentuk hamiltonian untuk setiap waktu t. Hal ini mengakibatkan kondisi yang harus dipenuhi yaitu turunan pertama bentuk hamiltonian terhadap masing kontrol $u_i(t)$ harus sama dengan nol sehingga $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial u_1} & \frac{\partial H}{\partial u_2} \end{pmatrix}^T = (0 \quad 0)^T$.

Dengan
$u_1 = \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta IS}{w_1}, u_2 = \dfrac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{w_2}$
Berdasarkan syarat batas untuk u_1, u_2 yaitu $0 \leq u_1 \leq 1,\ 0 \leq u_2 \leq 1$,1 diperoleh kontrol optimal $u_1{}^*, u_2{}^*$ yang ditulis sebagai berikut:

- Untuk kontrol $u_1(t)$:

$$u_1{}^*(t) = \begin{cases} 0 & jika\ u_1 \leq 0 \\ u_1 & jika\ 0 < u_1 < 1 \\ 1 & jika\ u_1 \geq 1 \end{cases}$$

Atau $$u_1{}^*(t) = min\left\{1, max\left\{0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta IS}{w_1}\right\}\right\}$$

- Untuk kontrol $u_2(t)$:

$$u_2{}^*(t) = \begin{cases} 0 & jika\ u_2 \leq 0 \\ u_2 & jika\ 0 < u_2 < 1 \\ 1 & jika\ u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Atau $$u_2{}^*(t) = min\left\{1, max\left\{0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{w_2}\right\}\right\}$$

3. Simulasi Numerik Sistem dengan Kontrol Optimal

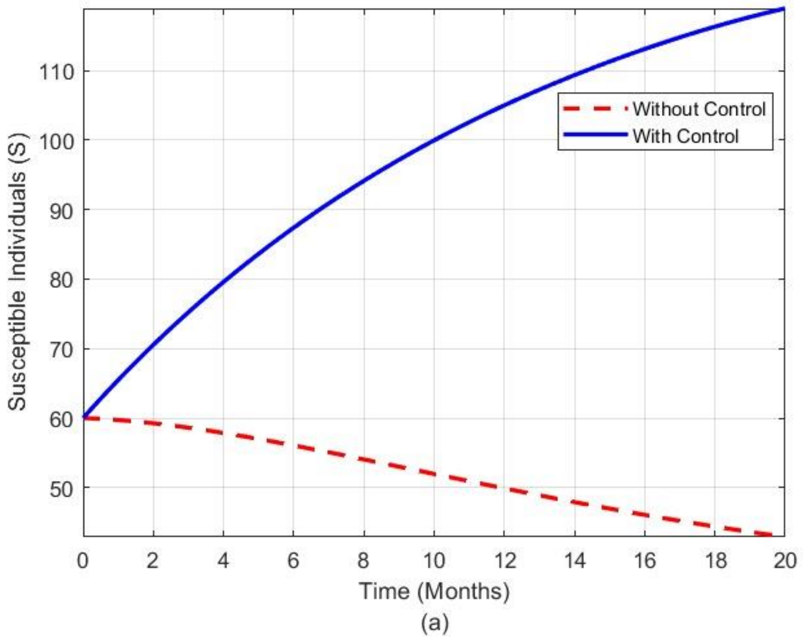
Pada bagian ini, dilakukan simulasi sistem tanpa kontrol dan dengan kontrol. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter Simulasi Numerik

Parameter	Deskripsi	Nilai
Λ	Laju Kelahiran	100
β	Laju Infeksi dari individu rentan menjadi individu laten karena adanya kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi	0.0049
μ	Laju Kematian alami pada manusia	0.073
θ	Laju individu yang terinfeksi	0.0001
ρ	Laju Kesembuhan dari setiap individu terinfeksi	0.01
δ	Laju kematian disebabkan oleh penyakit	0.003
α	Laju kehilangan kekebalan pada individu	0.0003
u_1	Tingkat Kampanye Kesehatan	0.4
u_2	Tingkat Pengobatan	0.2

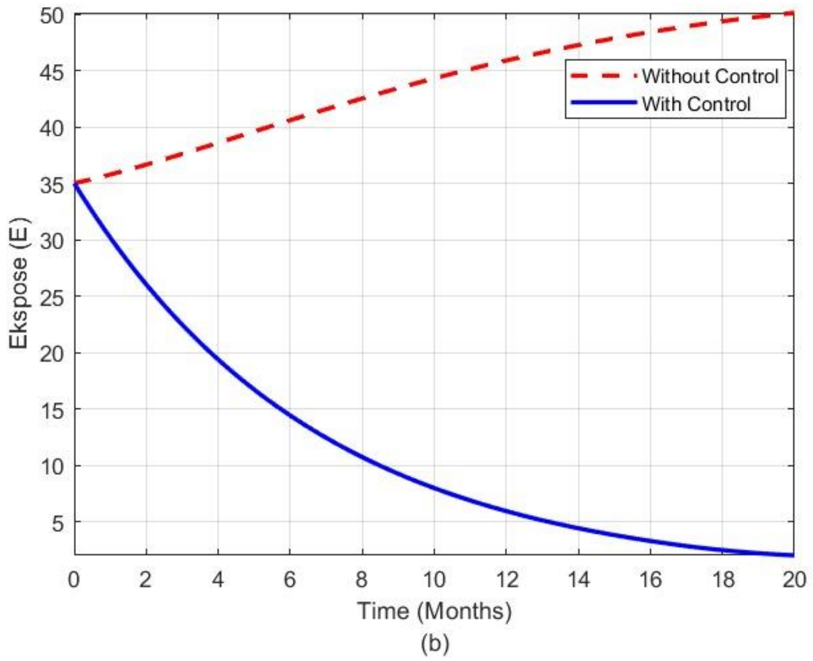
Diasumsikan nilai awal dari masing-masing populasi adalah $S(0) = 60, E(0) = 35, I(0) = 20, R(0) = 57$. Diasumsikan kontrol yang dilakukan terbatas dengan $u_{1_{max}} = u_{2_{max}} = 1$ artinya kontrol dapat diterapkan 100% sedangkan $u_{1_{min}} = u_{2_{min}} = 0$ artinya kontrol sama sekali tidak efektif sehingga tidak dapat diterapkan. Simulasi numerik menggunakan bobot individu yang diminimumkan $A_1 = A_2 = 5$ dengan alasan kepentingan dalam meminimumkan setiap subpopulasi terinfeksi adalah sama. W_1 merupakan bobot biaya untuk kampanye kesehatan, W_2 bobot biaya pengobatan untuk individu terinfeksi. Diasumsikan bobot biaya yang diperlukan untuk masing-masing kontrol dalam mengendalikan penyebaran penyakit pneumonia adalah $W_1 = 2$, $W_2 = 2$.

Berikut adalah grafik – grafik yang memperlihatkan pengaruh kampanye kesehatan dan pengobatan pada masing – masing kompartemen terhadap waktu.



Gambar 2. Grafik Pengaruh Kampanye Kesehatan dan Pengobatan Pada *Susceptible*

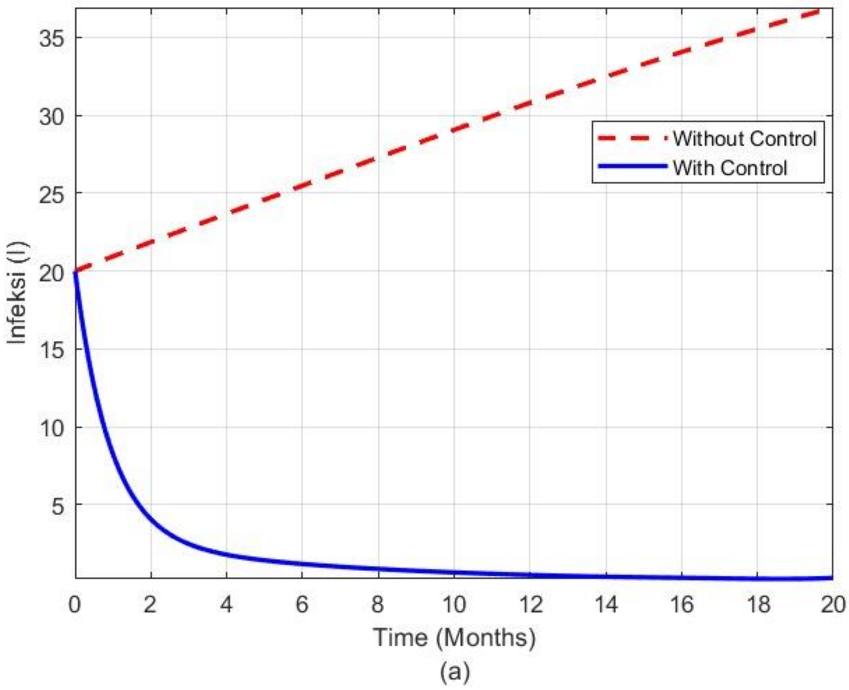
Gambar 2. memperlihatkan pengaruh kampanye kesehatan dan pengobatan pada individu susceptible. Terlihat bahwa setelah dilakukan pengobatan individu susceptible akan semakin naik karena banyak yang sembuh dan individu bisa rentan terhadap penyakit tersebut.



Gambar 3. Grafik Pengaruh Kampanye Kesehatan dan Pengobatan Pada *Exposed*

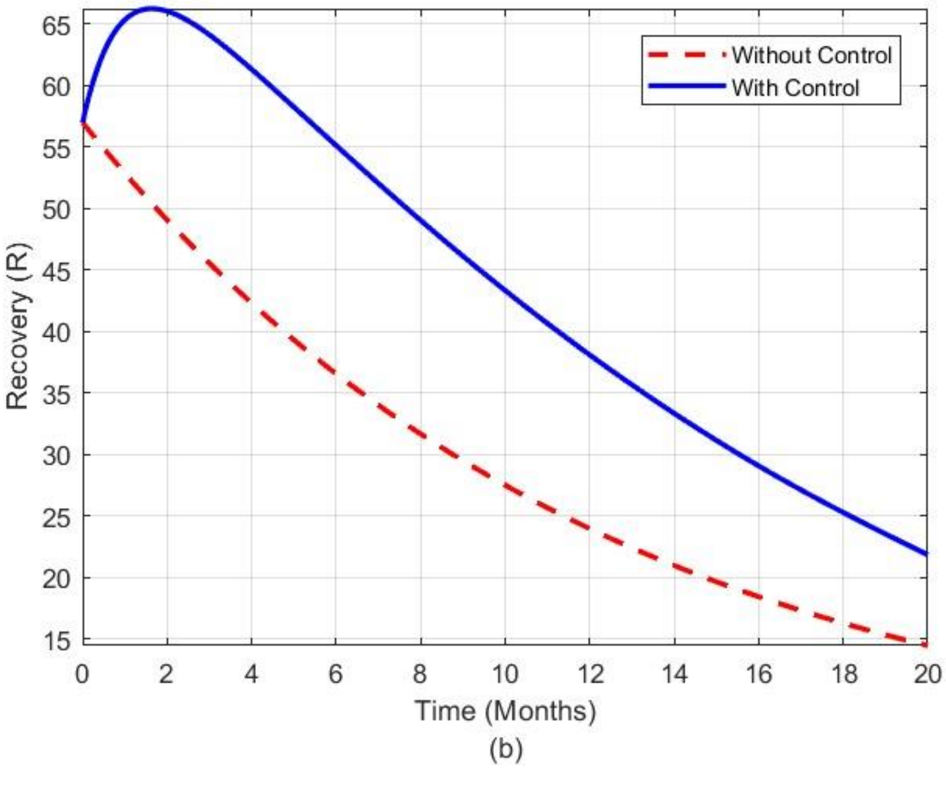
Gambar 3 memperlihatkan pengaruh kampanye kesehatan dan pengobatan pada individu *Exposed*. Terlihat bahwa setelah dilakukan pengobatan, individu *Exposed* akan semakin berkurang. Jumlah individu *Exposed* akan lebih berkurang lagi setelah dilakukan kontrol pada kampanye kesehatan dan pengobatan pada bulan ke-19.

INTENS Jurnal Riset Sains Teknologi dan Bisnis
Volume 1; Nomor 1 ; Juni 2024 ; Page 54-61



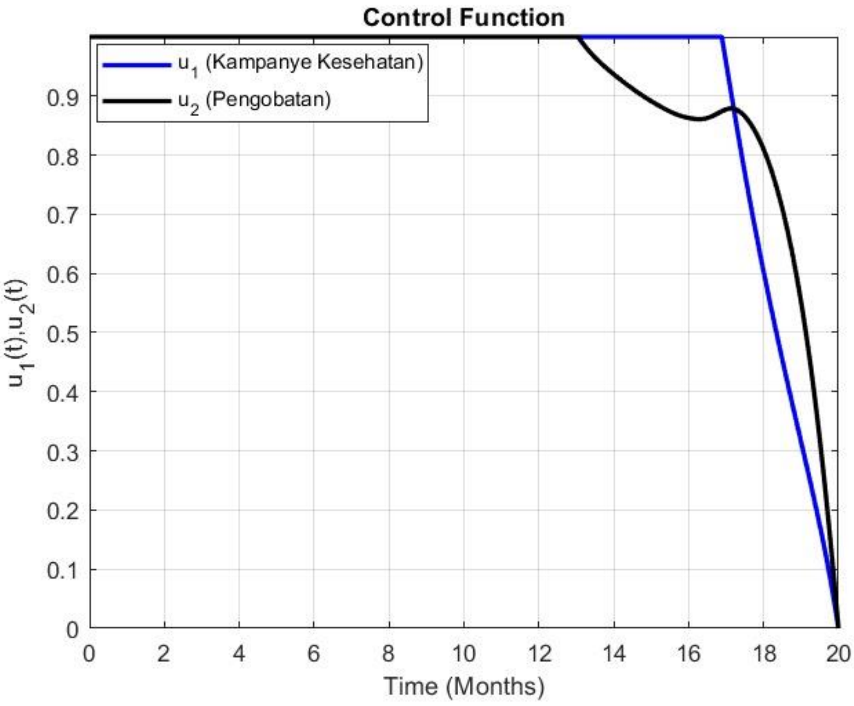
Gambar 4. Grafik Pengaruh Kampanye Kesehatan dan Pengobatan Pada *Infected*

Gambar 4 memperlihatkan pengaruh kampanye kesehatan dan pengobatan pada individu *infected*. Terlihat bahwa setelah dilakukan pengobatan, individu *infected* akan semakin berkurang. Jumlah individu *infected* akan lebih berkurang lagi setelah dilakukan kontrol pada kampanye kesehatan dan pengobatan pada bulan ke-13.



Gambar 5. Grafik Pengaruh Kampanye Kesehatan dan Pengobatan Pada *Recovered*

Gambar 5 memperlihatkan pengaruh kampanye kesehatan dan pengobatan pada individu *recovered*. Terlihat bahwa setelah dilakukan kampanye kesehatan dan pengobatan, individu recovered akan semakin bertambah. Jumlah individu recovered akan lebih bertambah lagi setelah dilakukan kontrol pada kampanye kesehatan dan pengobatan. Pada waktu tertentu, proporsi individu susceptible, exposed, infected dan recovered tidak mengalami perubahan sehingga sistem berada pada kondisi setimbang.



Gambar 6. Grafik Fungsi Kontrol

Berdasarkan Gambar 6 pemberian kontrol berupa kampanye kesehatan (u_1) harus diterapkan secara maksimum dari bulan pertama pengamatan hingga akhir pengamatan, pengobatan pada individu terinfeksi (u_2) harus diterapkan secara maksimum dari bulan pertama hingga bulan ke enam dan pada bulan berikutnya pemberian kontrol (u_2) dapat diturunkan secara perlahan sedangkan pemberian

KESIMPULAN

Dengan Prinsip Maksimum Pontryagin didapatkan solusi kontrol optimal pada model epidemik SEIR pada penyakit pneumonia, sehingga kontrol pada pemberian kampanye kesehatan dan pengobatan berpengaruh pada berkurangnya individu rentan dan terinfeksi sehingga akan meningkatkan jumlah individu yang sehat. Hasil simulasi memperlihatkan keefektifan pengendalian dengan kontrol kampanye kesehatan dan pengobatan dapat mengurangi populasi yang terinfeksi sehingga penyebaran penyakit dapat dicegah.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada pihak – pihak yang telah membantu dan mendukung terlaksananya penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ansar, A. (2018). Pemodelan Matematika SIRS dengan Vaksinasi pada penyebaran panyakit Malaria (Studi Kasus: Kabupaten Merauke) (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

[2] Bohari, N.A. (2021). Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar.

[3] Depkes RI. (2002). *Pharmaceutical Care Untuk Penyakit Infeksi Saluran Pernapasan*, Departemen Kesehatan Republik Indonesia: Jakarta.

[4] Diekmann, O & Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemilogy of Infectious Disease*. New York: John Wiley and Son.

[5] Ermilatni, E. (2016). Model Matematika SEIR untuk Kontrol campak dengan vaksinasi di Kabupaten Bulukumba (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

INTENS Jurnal Riset Sains Teknologi dan Bisnis
Volume 1; Nomor 1 ; Juni 2024 ; Page 54-61
[6] Grimshaw, R. (1990). *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Blackwell Scientific Publication. Oxford Boston Melbourne

[7] Lestari, D. (2013). Diktat Persamaan Diferensial.Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta.

[8] Rosdiana. (2015). Pemodelan Matematika SIR dengan Vaksinasi ada Penyebaran Penyakit Hepatitis B (Studi Kasus Provinsi Sulawesi Selatan) (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

[9] Ruminta. (2014). Matriks Persamaan Liner dan Pemprograman Linier. Bandung: Rekayasa Sains.

[10] Ruslaeni. (2010). Gambaran Kejadian Pneumonia Pada Bayi dan Balita di RSUD Labuang Baji Makassar Tahun 2009 (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar, Makassar.

[11] Side & Rangkuti. (2015). Pemodelan Matematika dan Solusi Numerik untuk Penularan demam Berdarah. Medan: Perdana Publishing.

[12] Sugiyarto. (2014). Persamaan Diferensial dilengkapi Contoh Penyelesaian Masalah untuk Umum dan Mahasiswa: Binafsi Publisher.

[13] Wahab, W. & Subiantoro, A. (2004). Fundamental of Control system Stability Criteria routhhurwi